Számsorok / függvénysorok

Legyen a_n egy számsorozat. A *részletösszeg sorozat*: $S_n := a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Az a_n sorozatból képzett **sámsor**:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n := a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots \tag{1}$$

Az (1) számsor **konvergens** (**divvergens**), ha S_n konvergens (divergens). Az (1) számsor konvergens, akkor S_n sorozat határértékét az (1) számsor **összegé**nek nevezzük.

Az $a_n = aq^n$ sorozatból képzett sort **mértani sor**nak nevezzük. A $\sum_{n=0}^{\infty} aq^n$ mértani sor pontosan, akkor konvergens, ha $|q| < 1$. Az összege

$$\sum_{n=0}^{\infty} aq^n = \frac{a}{1-q}, \qquad \text{ha} \quad |q| < 1.$$

Az $a_n = 1/n^\alpha$ sorozatból képzett sort **hiperharmonikus sor**nak nevezzük. ($\alpha = 1$ esetben harmonikusnak.) A $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ hiperharmonikus sor pontosan akkor konvergens, ha $\alpha > 1$.

- Ha $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergens, akkor $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.
- Egy sor konvergenciáját véges sok tagjának megváltoztatása nem befolyásolja.
- Ha $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ és $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ konvergens, akkor $\sum_{n=0}^{\infty} a_n + cb_n$ is konvergens és az összege: $\sum_{n=0}^{\infty} a_n + cb_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n + c\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.
- **Majoráns-/minoránskritérium**: Ha $0 \le a_n \le b_n$ ($n \ge N$ esetén), akkor

$$\text{ha } \sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ konvergens, akkor } \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ is konvergens}$$

$$\text{ha } \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ divergens, akkor } \sum_{n=0}^{\infty} b_n \text{ is divergens}$$

- **Gyökkritérium**: Ha $0 \le a_n$ ($n \ge N$ esetén), akkor

$$\text{ha } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1, \text{ akkor } \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergens}$$

$$\text{ha } \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1, \text{ akkor } \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ divergens}$$

- **Hányadoskritérium**: Ha $0 \le a_n$ ($n \ge N$ esetén), akkor

$$\text{ha } \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1, \text{ akkor } \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ konvergens}$$

$$\text{ha } \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1, \text{ akkor } \sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ divergens}$$

- **Integrálkritérium**: Ha $f : [N, \infty) \to [0, \infty)$ monton csökkenő, a $\sum_N^\infty f(n)$ sor pontosan akkor konvergens, ha a $\int_N^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ improprius integrál konvergens.
- Ha $\sum_{n=0}^\infty |a_n|$ konvergens (abszolút konvergencia), akkor $\sum_{n=0}^\infty a_n$ is konvergens.
- **Leibnitz kritérium**: Ha a_n alternál ($a_n a_{n+1} < 0$) és $|a_n|$ mononton csökkenve tart 0-hoz, akkor $\sum_{n=0}^\infty a_n$ konvergens. Ekkor $|\sum_{n=0}^\infty a_n - S_n| < a_{n+1}$.

Legyen f_n egy függvénysorozat. Az f_n sorozatból képzett **függvénysor**:

$$\sum_{n=1}^\infty f_n := f_1 + f_2 + \ldots + f_n + \ldots$$

A $\sum_{n=1}^\infty f_n$ függvénysor **konvergenciatartomány**a azon x_0 számok halamza amire a $\sum_{n=1}^\infty f_n(x_0)$ sámsor konvergens. A $\sum_{n=1}^\infty f_n$ függvénysor **összegfüggvény**e az a függvény aminek az éretlmezési tartománya a sor konvergenciatartománya és az értelmezési tartomány x_0 pontjában a függvényérték a $\sum_{n=1}^\infty f_n(x_0)$ sorösszeg.

Feladatok:

1. Határozzuk meg a következő számsorok összegét:

   a.) $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty \frac{5}{3^n}$ b.) $\displaystyle\sum_{n=2}^\infty \frac{3}{2^{n+1}}$ c.) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{2^{n+1} - 3^{n-1}}{5^n}$ d.) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n(n+1)}$

2. Döntsük el, hogy konvergensek-e a következő sámsorok:

   a.) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$ b.) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{2}{\sqrt{n^5}}$ c.) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{n}{\sqrt[3]{n^2}}$ d.) $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty e^{-n}$

   e.) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{n^3}{3^n}$ f.) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{2^n}{n!}$ g.) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{n+1}{n^2}$ h.) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{e^n}$ i.) $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty \frac{n-2}{n^3+1}$

   j.) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{(-2)^n}{n^2}$ k.) $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty \frac{1+(-1)^n}{3^n}$ l.) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{\cos(n)}{n^2}$ m.) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n^2}$

3. Határozzuk meg az S_3 részletösszeget és becsüljük meg a hibát:

   a.) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{n^2}$ b.) $\displaystyle\sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ c.) $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{n!}$ d.) $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{n!}$

4. Határozzuk meg a következő függvénysorok konvergencia tartományát és összegfüggvényét:

   a.) $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty 4^n x^{2n}$ b.) $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty \ln^n(x)$ c.) $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty \sin^n(x)$ d.) $\displaystyle\sum_{n=0}^\infty e^{nx}$