Szétválasztható differenciálegyenletek

Azokat a differenciálegyenleteket, amelyek felírhatóak

$$y' = f(x)g(y) \tag{1}$$

alakban, **szétválasztható differenciálegyenlet**eknek nevezzük.
Megoldási módszer: Az (1) differenciálegyenlet megoldásai teljesítik a következő összefüggést:

$$\int \frac{1}{g(y)}\,\mathrm{d}y = \int f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2}$$

Feladatok:

1. Határozzuk meg a következő differenciálegyenletek általános megoldását:

$$\text{a.) } y' = 3x^2 \qquad \text{b.) } 3y' = \frac{\cos(x)}{y^2} \qquad \text{c.) } \sqrt{x}y' = 3y$$

$$\text{d.) } 2xy' + y' = 6e^y \qquad \text{e.) } \cos(y)y' = \ln(x) \qquad \text{f.) } 2\sqrt{3x+2}y' = 3 + 3y^2$$

2. Oldjuk meg a következő kezdetiérték-problémákat:

$$\text{a.) } y' = 2yx,\ y(0) = 3 \qquad \text{b.) } 5y^4y' = 6e^{3x},\ y(0) = 2$$

$$\text{c.) } xy' = 1 + y^2,\ y(1) = 1$$

Megoldások:

1. a.) $f(x) = 3x^2,\ g(y) = 1,\ y(x) = x^3 + c$

   b.) $f(x) = \cos(x),\ \frac{1}{g(y)} = 3y^2,\ y(x) = \sqrt[3]{\sin(x) + c}$

   c.) $f(x) = 3x^{-\frac{1}{2}},\ \frac{1}{g(y)} = \frac{1}{y},\ y(x) = ce^{6\sqrt{x}}$

   d.) $f(x) = \frac{6}{2x+1},\ \frac{1}{g(y)} = e^{-y},\ y(x) = -\ln(c - 3\ln|2x+1|)$

   e.) $f(x) = \ln(x),\ \frac{1}{g(y)} = \cos(y),\ y(x) = \arcsin\big(x\ln(x) - x + c\big)$

   f.) $f(x) = \frac{3}{2\sqrt{3x+2}},\ \frac{1}{g(y)} = \frac{1}{1+y^2},\ y(x) = \operatorname{tg}\big(\sqrt{3x+2} + c\big)$

2. a.) Az általános megoldás: $y_a(x) = ce^{x^2}$. Ebből $y(0) = c$. Ezért az $y(0) = 3$ feltételhez tartozó partikuláris megoldás: $y_p(x) = 3e^{x^2}$.

   b.) $y_a(x) = \sqrt[5]{2e^{3x} + c},\quad y(0) = \sqrt[5]{2 + c},\quad y_p(x) = \sqrt[5]{2e^{3x} + 30}.$

   c.) $y_a(x) = \operatorname{tg}(\ln|x| + c),\quad y(1) = \operatorname{tg}(c),\quad y_p(x) = \operatorname{tg}(\ln|x| + \pi/4).$