# Matematika KE Szigorlat

2013.01.09.

1. Vizsgálja meg az $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ függvényt monotonitás és szélsőértékek szempontjából, majd vázolja a függvény grafikonját. (9pt)

2. Legyen $w = \sqrt{8}(\cos 45° + i \sin 45°)$ és $z = -1 + i$. Végezze el a következő műveleteket:

$$\text{a)}\ \frac{w^3}{z} + i, \qquad \text{b.)}\ \frac{\overline{w+z}}{i+1}, \qquad \text{c.)}\ \sqrt[3]{2i - z}, \qquad \text{d.)}\ \ln(iz)$$

(10pt)

3. Van-e potenciálja a $\underline{\mathrm{v}}(\mathbf{r}) = [e^{xy}y + 2x, e^{xy}x + z^{-1}, -yz^{-2}]$ vektormezőnek? Ha van határozza meg. (8pt)

4. Számítsa ki a következő határozatlan integrálokat:

$$\text{a)}\ \int \frac{e^x + 2}{e^x - 2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{b.)}\ \int \frac{1}{x}\sqrt{\ln^3(x)}\,\mathrm{d}x \qquad \text{c.)}\ \int \frac{6x}{3x+1}\,\mathrm{d}x$$

(10pt)

5. Határozza meg a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = xz\,\underline{\mathrm{j}} + \underline{\mathrm{k}}$ vektormezőnek az $\mathbf{r}(t,s) = ts\,\underline{\mathrm{i}} + t^2\,\underline{\mathrm{j}} + s\,\underline{\mathrm{k}}$ $\ 0 \le t \le 1, -1 \le s \le 1$ felületen vett integrálját. (10pt)

6. Oldja meg a következő differenciálegyenleteket:

$$\text{a)}\ y'' + 2y' + 5y = 0, \quad y'(0) = 0, y(0) = 1 \qquad \text{b.)}\ xy' + y = 3x^2 + 1, \quad y(0) = 2$$

(12pt)

7. Végezze el a következő mátrix műveleteket, ha elvégezhetőek!

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 4 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\text{a.)}\ \det(\mathbf{AC} + \mathbf{B}) \quad \text{b.)}\ \mathbf{B}^{-1} \quad \text{c.)}\ \mathbf{CA} - \mathbf{B}^{\mathsf{T}})$$

(8pt)

8. Számítsa ki az $f(x,y) = 2y + 3x^2$ függvény kettős integrálját az $A = (1,0)$, $B = (2,1)$, és $C = (1,2)$ pontok által meghatározott háromszögtartományon. (10pt)

9. Hol metszi az $x^3y - z^2 = -1$ felület $P = (2,1,3)$ ponthoz tartozó érintősíkja az $\mathbf{r}(t) = \left[\ln(2t-3), \sqrt{t^3} \cdot t^{-0.5}, 8/(t-1)\right]$ térgörbe $t_0 = 2$ paraméterhez tartozó érintőjét? (14pt)

10. Egy $\underline{\mathrm{v}}$ sebességgel mozgó $Q$ töltésű részecskére a $\underline{\mathrm{B}}$ mágneses és $\underline{\mathrm{E}}$ elektromos térben ható Lorentz-erő a következő formulával számolható: $\underline{\mathrm{F}} = Q(\underline{\mathrm{E}} + \underline{\mathrm{v}} \times \underline{\mathrm{B}})$. Határozza meg a $\underline{\mathrm{v}} = (2,1,1)$ sebességgel mozgó $Q = 2$ töltésű részecskére ható Lorentz-erő nagyságát az $\underline{\mathrm{E}} = (2,1,4)$ és $\underline{\mathrm{B}} = (3,0,2)$ konstans elektromágneses térben. (5pt)

11. Konvergens-e a következő numerikus sor? Ha igen, mennyi az összege?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[3\left(\frac{-1}{2}\right)^n + 2\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$$

(4pt)