Matematika KE Szigorlat

2013.01.17.

1. Oldja meg a következő egyenleteket a komplex számok halmazán:

$$\text{a.) } z^3 = iz \qquad \text{b.) } z^2 + \sqrt{\pi}(i+1)z + \ln(i) = 0$$

(10pt)

2. Számítsa ki a következő határozatlan integrálokat:

$$\text{a) } \int \cos(2x+\pi) + \sqrt{\pi^2+2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{b.) } \int \frac{2x-1}{x^3-x}\,\mathrm{d}x \qquad \text{c.) } \int \frac{\cos(x)+1}{x+\sin(x)}\,\mathrm{d}x$$

(12pt)

3. Egy $\mathbf{v}$ sebességgel mozgó Q töltésű részecskére a $\underline{\mathrm{B}}$ mágneses és $\underline{\mathrm{E}}$ elektromos térben ható Lorentz-erő a következő formulával számolható: $\underline{\mathrm{F}} = Q(\underline{\mathrm{E}} + \mathbf{v} \times \underline{\mathrm{B}})$. Határozza meg a $\mathbf{v} = (1, 2, -1)$ sebességgel mozgó $Q = -1$ töltésű részecskére ható Lorentz-erőt az $\underline{\mathrm{E}} = (4, -1, 3)$ és $\underline{\mathrm{B}} = (2, 0, 1)$ konstans elektromágneses térben. (5pt)

4. Határozza meg az alábbi kétváltozós függvény lokális szélsőértékeit.

$$f(x, y) = 2y^3 - 6xy + 2x^3 + 2$$

(10pt)

5. Melyik pontokban párhuzamos az $f(x) = x^3 - x + 2$ függvény érintője az $y = 2x - 12$ egyenessel?

(6pt)

6. Határozza meg a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = xz\,\underline{\mathrm{j}} + \underline{\mathrm{k}}$ vektormezőnek az $\mathbf{r}(t, s) = ts\,\underline{\mathrm{i}} + t^2\,\underline{\mathrm{j}} + s\,\underline{\mathrm{k}} \quad 0 \le t \le 1, -1 \le s \le 1$ felületen vett integrálját. (11pt)

7. Oldja meg a következő differenciálegyenleteket:

$$\text{a) } y'' + y' - 6y = e^t, \quad y'(0) = 0, y(0) = 0 \qquad \text{b.) } 3y'y^2 = 2x + 1, \quad y(1) = 2$$

(12pt)

8. Milyen messze van az $A(1, 2, 1)$, $B(1, 0, -1)$ és $C(2, 0, 1)$ pontok által meghatározott sík az origótól?

(6pt)

9. Hol metszi az $x^3 + yz^2 = -3$ felület $P = (1, -1, 2)$ ponthoz tartozó érintősíkja az $\mathbf{r}(t) = [(t+1)^2, -2t, t^3 + 1]$ térgörbe $t_0 = 0$ paraméterhez tartozó érintőjét?

(15pt)

10. Konvergens-e a következő numerikus sor? Ha igen, mennyi az összege?

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n + 3^{n-1}}{2^n}$$

(5pt)

11. Határozza meg a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = [xy^2, yz, x^3y^{-1}]$ vektormezőnek a divergenciáját és rotációját a $P(0, 1, 2)$ pontban. (8pt)