Matematika KE Szigorlat

2010.01.13.

1. Legyen $w = 2(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$ és z_1 a következő egyenletnek a pozitív képzetesrészű megoldása:
$$z^2 - 4z + 8 = 0$$
Végezze el a következő műveleteket:
$$\text{a) } z_1 \cdot w, \qquad \text{b.) } \overline{3z_1 + i}, \qquad \text{c.) } \sqrt[3]{z_1}$$
(12pt)

2. Számítsa ki a következő határozatlan integrálokat:
$$\text{a) } \int \frac{x^2 \cos(x^3+13)}{\sin(x^3+13)}\,\mathrm{d}x \qquad \text{b.) } \int \frac{2x^2-2x+1}{x^2(2x-1)}\,\mathrm{d}x \qquad \text{c.) } \int x\cos(3x-\pi)\,\mathrm{d}x$$
(13pt)

3. Határozza meg az $f(x) = \sqrt{x}$ és $g(x) = x^2$ függvények által közrezárt korlátos tartomány területét.
(9pt)

4. Oldja meg a következő differenciálegyenleteket:
$$\text{a) } y' - 3y = 13\sin(2t), \quad y(0) = 0$$
$$\text{b.) } y'' - 5y' + 6y = 2e^t, \quad y'(0) = y(0) = 0$$
(16pt)

5. Invertálja a következő mátrixot, majd ellenőrizze a kapott eredményt:
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$
(10pt)

6. Határozza meg az alábbi kétváltozós függvény lokális szélsőértékeit:
$$f(x,y) = 2x^3 - 6xy + 3y^2 + 17$$
(12pt)

7. Mennyi a munkavégzés a $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ erőtérben az $\mathbf{r}(t)$ görbe mentén haladva, ha
$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = -y\,\underline{\mathrm{i}} + x\,\underline{\mathrm{j}} + \sqrt{y^3}x\,\underline{\mathrm{k}}$$
$$\mathbf{r}(t) = \cos t\,\underline{\mathrm{i}} + \sin t\,\underline{\mathrm{j}} + t\,\underline{\mathrm{k}} \qquad 0 \le t \le \pi/2$$
(12pt)

8. Hol metszi az $A(1,2,-1)$, $B(3,2,0)$ pontok által meghatározott egyenes a
$$xy + z^3 = 1$$
felület $P(2,1,-1)$ pontjához tartozó érintősíkját?
(16pt)