Matematika KE Szigorlat

2013.01.24.

1. Oldja meg a következő egyenleteket a komplex számok halmazán:

$$\text{a.) } z^5 + 16z = 0 \qquad \text{b.) } z^2 - 4z - \frac{5i\ln(-1)}{\pi} = 0$$

(10pt)

2. Számítsa ki a következő határozatlan integrálokat:

$$\text{a) } \int \frac{x-2}{x^3+x}\,\mathrm{d}x \qquad \text{b.) } \int \frac{x^2+4x+5}{x+2}\,\mathrm{d}x \qquad \text{c.) } \int 6x\cos(3x+\pi)\,\mathrm{d}x$$

(12pt)

3. Határozza meg az alábbi kétváltozós függvény lokális szélsőértékeit.

$$f(x,y) = 4y^3 - 12xy + 4x^3 + 11$$

(10pt)

4. Hol a legmeredekebb az $f(x) = \frac{1}{e^x+1}$ függvény érintője? Milyen meredek ott az érintő?

(6pt)

5. Határozza meg a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \underline{\mathrm{i}} + 3x\,\underline{\mathrm{k}}$ vektormezőnek az $\mathbf{r}(t,s) = t\,\underline{\mathrm{i}} + t^2 s\,\underline{\mathrm{j}} + s^3\,\underline{\mathrm{k}}$ $\quad 0 \le t \le 1, -1 \le s \le 1$ felületen vett integrálját. (11pt)

6. Határozza meg az az $\mathbf{r}(t) = [(t+1)^2, -2t, t^3+1]$ térgörbe $t_0 = 0$ paraméterhez tartozó érintőjét.

(7pt)

7. Oldja meg a következő differenciálegyenleteket:

$$\text{a) } \frac{y'}{1+y^2} = e^x + 2x, \quad y(0) = 0 \qquad \text{b.) } y' - 3y = e^{3t}, \quad y(0) = 1$$

(12pt)

8. Milyen messze van az $A(1,3,4)$ és $B(1,6,8)$ pontok által meghatározott egyenes az origótól?

(7pt)

9. Hol metszi az $x^2 + yz^3 = 3$ felület $P = (2,-1,1)$ ponthoz tartozó érintősíkja az $x+1 = \frac{y-1}{3} = \frac{z}{2}$ egyenest?

(10pt)

10. Vizsgálja konvergencia szempontjából a következő számsorokat:

$$\text{a.) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+7}{n+8} \qquad \text{b.) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{7^n}{n!} \qquad \text{c.) } \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{13^n}$$

(7pt)

11. Határozza meg a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = [xy^3, xy+yz, x^2y^{-2}]$ vektormezőnek a divergenciáját és rotációját a $P(3,1,2)$ pontban. (8pt)