Lineáris elsőrendű differenciálegyeneltek

A lineáris elsőrendű differenciálegyeneltek általános alakja a következő:

$$y' + p(x) \cdot y = q(x). \tag{1}$$

Egy megoldási módszer: keresünk egy $m(x)$ függvényt, amivel az egyenletet végigszorozva a baloldal $(m(x) \cdot y)'$ alakban írható. Azaz egy olyan $m(x)$ függvényt keresünk, ami teljesíti az

$$(m(x) \cdot y)' = m'(x) \cdot y + m(x) \cdot y' = m(x) \cdot y' + m(x) \cdot p(x) \cdot y \tag{2}$$

összefüggést. Ehhez elég megadni egy olyan $m(x)$ függvényt, ami teljesíti az

$$m'(x) = m(x) \cdot p(x) \tag{3}$$

összefüggést. Könnyen meggondolható, hogy az

$$m(x) = e^{\int p(x)\,\mathrm{d}x} \tag{4}$$

függvények megfelelnek a céljainknak bármely integrációs konstans választása mellett. $m(x)$-el való szorzás után az egyenlet

$$(m(x) \cdot y)' = m(x) \cdot q(x) \tag{5}$$

alakú lesz. Az egyenlet mindkét oldalát x-szerint integrálva megkapjuk a differenciál egyenlet általános megoldását:

$$y(x) = \frac{\int m(x) \cdot q(x)\,\mathrm{d}x}{m(x)}. \tag{6}$$

Feladatok:

1. Oldja meg a következő elsőrendű lineáris differenciálegyenleteket:

a.) $y' - y = x$ b.) $y' + y = e^x$ c.) $y' + 2xy = 4x$

d.) $y' - \frac{y}{x} = x$ e.) $y' - \frac{y}{x} = 1$ f.) $y' - \frac{y}{x} = \ln x$

g.) $y' + \frac{y}{x} = 2 + 3x$ h.) $y' + \frac{y}{x} = e^x + 4\ln x$ i.) $y' + y\,\mathrm{tg}\,x = \mathrm{tg}\,x$

Megoldások:

a.) $y(x) = ce^x - x - 1$ b.) $y(x) = \frac{c}{e^x} + \frac{e^x}{2}$ c.) $y(x) = \frac{c}{e^{x^2}} + 2$

d.) $y = x^2 + cx$ e.) $y = x\ln x + cx$ f.) $y = \frac{x\ln^2 x}{2} + cx$

g.) $\frac{c}{x} + x^2 + x$ h.) $\frac{c}{x} + e^x - \frac{e^x}{x} - x + 2x\ln x$ i.) $c\cos x + 1$